

اصول کنترل غیر خطی

موعد تحویل: دوشنبه ۱۳۹۰/۱/۱۵

تمرین سری دوم

مدرس: حیرانی نوبری

تمرین‌های شماره ۴-۷-۹-۱۰-۱۲ را حل کنید.

۱. سیستم $\dot{x} = -x^3$ را در نظر بگیرید

الف) درباره پایداری حول تعادل بحث کنید.

ب) با استفاده از تعریف پایداری مجانبی، ثابت کنید پایداری نقطه تعادل، از نوع مجانبی است (با استفاده از روش جداسازی متغیرها نسبت به حل معادله دیفرانسیل اقدام کنید).

ج) با استفاده از تعریف پایداری نمایی، ثابت کنید پایداری نقطه تعادل، از نوع نمایی نمی‌باشد.

۲. سیستم خطی $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ را در نظر بگیرید.

الف) با استفاده از تعریف پایداری نمایی، ثابت کنید این سیستم حول تعادل پایدار نمایی است.

ب) حداقل a, b که در رابطه زیر صدق می‌کند را بیابید و تعبیر مفهومی آن را نیز ذکر کنید.

$$\|S(t_0 + t, t_0, x_0)\| \leq a\|x_0\| \exp(-bt)$$

۳. یک سیستم مرتبه ۲ با مقادیر ویژه تکراری در نظر بگیرید. می‌دانیم می‌توان با یک تبدیل خطی

ماتریس تحول حالت این سیستم را به فرم جردن تبدیل کرد. که این فرم جردن به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با حذف t از رابطه بالا رابطه تحلیل x_1 بر حسب x_2 را بدست آورید.

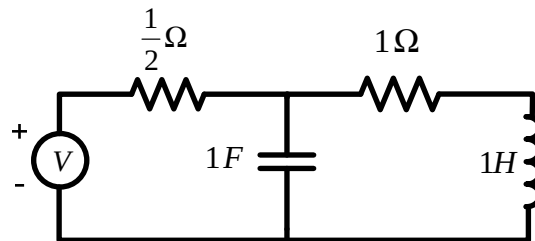
۴. معادله زیر در سیستم‌های بیولوژیکی به معادلات درنده-شکار معروف است .

$$\dot{x}_1 = x_1(\alpha - \beta x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2(\gamma - \delta x_1)$$

که در آن x_1 تعداد درندگان (به عنوان مثال تعداد گرگ‌ها) و x_2 تعداد شکارها (به عنوان مثال تعداد خرگوش‌ها) می‌باشد تمامی پارامترهای سیستم را یک در نظر گرفته و در صورت امکان با روش خطی سازی رفتار در حول و حوش تعادل را توضیح دهید.

۵. مدار الکتریکی زیر را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) با در نظر گرفتن ولتاژ خازن (x_1) و جریان سلف (x_2) به عنوان متغیرهای حالت، معادلات حالت را بدست آورید.

ب) با در نظر گرفتن $v = 0$ ، مسیر حالت را با روشی که در کلاس درس آموختید نمایش دهید.

۶. مدار سوال قبل را در نظر گرفته اما این بار مقاومت ۱ اهمی را با مقاومت غیرخطی که دارای رابطه‌ی زیر می‌باشد جایگزین می‌کنیم.

$$v_r = i_r^3 - 3i_r^2 + 3i_r =: f(i_r)$$

الف) با در نظر گرفتن ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیرهای حالت، معادلات حالت را بنویسید.

ب) نقاط تعادل مدار را در حالت ورودی صفر بررسی کنید.

ج) با خطی سازی حول هر نقطه تعادل، رفتار در نزدیکی آنها را بیان کنید.

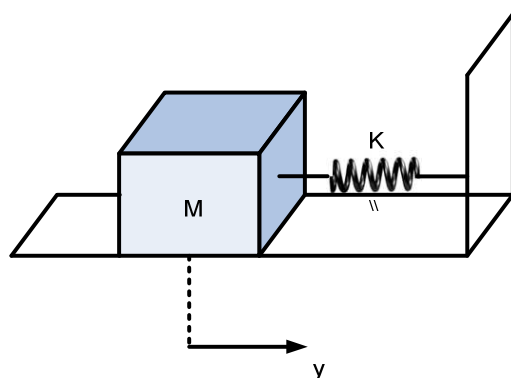
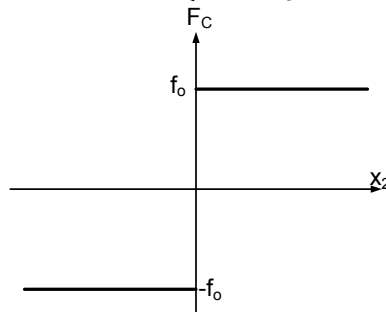
۷. با روشی در کلاس درس آموختید برای هریک از ماتریس‌های تحول حالت که در زیر داده شده است مسیر حالت را نمایش دهید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

۸. در ترمین شماره ۱ توانستیم مدل یک پاندول را بدست آوریم. اکنون با حذف t و حل معادله دیفرانسیل بین x_1 و x_2 ، رابطه تحلیل صفحه فاز را بیابید. سپس با استفاده از بسط مک لورن، تابع مثلثاتی درون معادله را به یک معادله درجه دوم تقریب زده و صفحه فاز را به طور تقریبی رسم کنید. با رسم صفحه فاز و استفاده از تعریف پایداری، رفتار حول نقطه تعادل را شرح دهید.

۹. در این مسئله می‌خواهیم اثر اصطکاک ایستایی را در یک سیستم جرم فنر مورد بررسی قرار دهیم. رابطه اصطکاک با سرعت جسم را می‌توان به صورت شکل زیر نشان داد. در ضمن برای سرعت صفر (حالت ایستایی) می‌دانیم که اندازه اصطکاک می‌تواند هر مقداری تا نیروی معین f_0 اختیار کند. الف) نشان دهید می‌توان برای این سیستم معادلات حالت زیر را در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & ; x_1 &= y \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{F_c(x_2)}{m} & ; x_2 &= \dot{y} \\ F_c(x_2) &= \begin{cases} f_0 & x_2 > 0 \\ -f_0 \leftrightarrow f_0 & x_2 = 0 \\ -f_0 & x_2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$



ب) در صفحه حالت، همه‌ی نقطه تعادل را بر حسب f_0 و k تعیین کنید.

ج) به کمک معادله دیفرانسیل $\frac{dx_2}{dx_1}$ ، نشان دهید مسیرهای حالت برای x_2 های مثبت، بیضی هایی هستند به مرکز $(-\frac{f_0}{k}, 0)$ و برای x_2 های منفی، بیضی‌هایی هستند به مرکز $(\frac{f_0}{k}, 0)$ این مسیرها را برای محدوده مناسبی به صورت کیفی رسم کرده، جهت حرکت را نیز مشخص کنید.

د) دقیقاً استدلال کنید که کدامیک از نقاط تعادل پایدارند و در صورت پایداری از چه نوعی؟

۱۰. در مسئله‌های قبل توانستیم برای بعضی از سیستم های غیرخطی که رابطه تحلیلی x_2 بر حسب x_1 قابل بدست آوردن بود، صفحه فاز را رسم کنیم. اکنون می‌خواهیم با استفاده از روش منحنی‌های هم شیب اقدام به نمایش مسیر حالت کنیم. برای سیستم های زیر این کار را انجام داده و صفحه حالت را رسم کنید.

(الف)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

۱۱. برنامه‌ای در نرم‌افزار *MATLAB* بنویسید که بتواند با حل معادله‌ی دیفرانسیل به روش عددی، مسیر حالت را نمایش دهید و با رسم مسیر حالت سیستم‌های سوال قبل، صحت آنها را مورد بررسی قرار دهید.

۱۲. قبلاً با روش برگشتی زیر برای یافتن ریشه معادله $f(x) = 0$ ، آشنایی دارید.

$$x[k+1] = x[k] - \frac{f(x[k])}{\dot{f}(x[k])}$$

الف) نشان دهید ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ ، نقاط تعادل سیستم دینامیکی بالا می‌باشند. بشرط اینکه در این نقاط مشتق f مخالف صفر باشند.

ب) با روش خطی سازی در نقطه تعادل، نشان دهید که تمامی نقطه تعادل این سیستم، پایدار مجانبی خواهند بود. البته با همان شرط مذکور در الف.

۱۳. سیستم خطی ثابت با زمان $\dot{x} = Ax + Bu$ را در نظر بگیرید.

الف) به ازای $u = 0$ ، بر روی نقاط تعادل سیستم بحث کنید. برای حالت‌های مختلفی که در نظر می‌گیرید تعداد نقاط تعادل را بیان کرده و برای آن یک مثال مرتبه دوم ارائه کنید.

ب) به ازای $u = u_0, u_0 \in R$ ، بر روی نقاط تعادل سیستم بحث کنید. برای حالت‌های مختلفی که در نظر می‌گیرید تعداد نقاط تعادل را بیان کرده و برای آن یک مثال مرتبه دوم ارائه کنید.